

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ MIMO ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ОБНУЛЕНИЯ

Савищенко Н. В.¹, Пелин А. А.²

DOI:10.21681/3034-4050-2026-2-2-17

Ключевые слова: беспроводные системы связи, теория информации, цифровая обработка сигналов, каналы с замираниями, многоантенные системы, предварительное кодирование, метод обнуления, специальные интегральные функции.

Аннотация

Цель статьи является анализ эффективности метода обнуления при приеме сигналов в системах MIMO (Multiple Input Multiple Output) и получение точных аналитических выражений для вероятности ошибки с использованием теории потенциальной помехоустойчивости и теории специальных функций.

Методы исследования: используется комплексный подход, сочетающий строгие аналитические расчеты и имитационное моделирование в среде MATLAB для оценки эффективности пространственной фильтрации сигналов методом обнуления в системах MIMO.

1. Расчет вероятности битовой ошибки BER (Bit Error Rate) для детектора обнуления производится на основе анализа статистических свойств обратной корреляционной матрицы канала. Вывод выражений для помехоустойчивости выполнен с использованием аппарата специальных интегральных функций (функция Гаусса, T-функция Оуэна) в соответствии с методикой, изложенной в монографии «Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи» [1]. Методика позволяет получить строгие теоретические оценки производительности.

2. Имитационное моделирование: для верификации полученных аналитических выражений и исследования поведения системы в условиях реальной сигнально-помеховой обстановки разработана имитационная модель канала MIMO с рэлеевскими замираниями в среде MATLAB.

Результаты исследования: полученные аналитические и экспериментальные данные раскрывают специфику работы метода обнуления в системах MIMO. В частности, установлено, что метод обнуления (ZF – Zero Forcing) позволяет полностью устранить межсимвольную интерференцию (межканальные помехи) за счет инверсии матрицы канала. Однако моделирование выявило ключевой недостаток метода – эффект усиления шума (noise enhancement), который проявляется при плохой обусловленности канальной матрицы. Сравнительный анализ показал, что в области низких отношений сигнал/шум метод обнуления уступает алгоритму MMSE (Minimum Mean Square Error, минимальная среднеквадратичная ошибка) по энергетической эффективности, но демонстрирует высокую эффективность и линейный рост пропускной способности при высоких значениях SNR (Signal-to-Noise Ratio). Подтверждена высокая сходимость результатов расчета по предлагаемой аналитической методике (через спецфункции) с результатами Монте-Карло моделирования.

Научная новизна работы: заключается в адаптации математического аппарата специальных интегральных функций для точного расчета помехоустойчивости при использовании метода обнуления с учетом статистических характеристик. В отличие от традиционных оценок, базирующихся на асимптотических приближениях, предложенный подход позволяет получить строгие количественные оценки вероятности ошибки приема многопозиционных сигналов линейного детектора в условиях рэлеевских замираний, что повышает достоверность прогнозирования качества связи при проектировании антенных систем.

1. Введение

Эволюция беспроводных телекоммуникаций представляет собой непрерывный процесс, движимый возрастающими требованиями к скорости передачи данных, надежности, помехоустойчивости и пропускной способности. От ранних радиосистем до современных сетей сотовой связи и Wi-Fi (Wireless Fidelity), каждая новая веха в развитии была ответом на растущие потребности потребителей. Изначально беспроводные системы полагались на простейшие

конфигурации, которые, несмотря на свою эффективность для базовых задач, столкнулись с фундаментальными ограничениями по мере усложнения информационных потоков и увеличения числа подключенных устройств.

В данном контексте системы с одной антенной на передающей стороне и одной антенной на приёмной стороне SISO (Single Input Single Output) и системы с несколькими антеннами на передающей и приёмных сторонах MIMO занимают центральное место в современной

¹ Савищенко Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин Военной академии связи им. С. М. Буденного, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: snikaspb@mail.ru

² Пелин Артем Александрович, адъюнкт кафедры общепрофессиональных дисциплин Военной академии связи им. С. М. Буденного, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: PelinVUC@yandex.ru

беспроводной связи. Система SISO представляет собой традиционный подход, использующий одну антенну для передачи и одну для приема данных [5]. Вышеуказанная конфигурация, хотя и проста в проектировании и экономична, обладает ограниченными возможностями по использованию пространственных ресурсов. В отличие от неё, система MIMO является серьезным достижением, которое преодолевает ограничения SISO, используя несколько антенн как на передающей, так и на принимающей стороне для улучшения производительности и пропускной способности беспроводных сетей [5–7].

Фундаментальные математические пределы пропускной способности многоантенных архитектур в условиях многолучевых замираний были впервые строго сформулированы в ставшей классической работе Дж. Фошини (G. J. Foschini) [2]. Развитие данного математического аппарата, подробно изложенное в авторитетных зарубежных монографиях (например, под общей редакцией Э. Бильери и Х. Пора [3]), заложило базис современного пространственного кодирования. Сегодня концепция MIMO трансформировалась в технологии массивированных антенных решеток (Massive MIMO) [4], что сделало вопросы поиска низкобюджетных линейных фильтров пространственного разделения потоков (ZF и MMSE) как никогда актуальными для международной инженерной школы.

Переход от системы SISO к системе MIMO является не просто постепенным улучшением, а существенным сдвигом, обусловленным возрастающим спросом на обеспечение скорости передачи. Системы SISO сталкиваются с присутствующими им ограничениями, в частности, с логарифмическим увеличением пропускной способности с ростом отношения сигнал/шум, (SNR) что означает убывающую отдачу от увеличения мощности или полосы пропускания. Технология MIMO появилась как необходимое решение для преодоления существующих ограничений, поскольку предоставляет возможность использовать пространственное разнесение и передачу. Такая закономерность – выявление фундаментального узкого места в существующей технологии и последующее использование нового физического измерения для его преодоления – является повторяющейся темой в инженерии. Успех технологии MIMO подтверждает стратегию поиска многомерных решений одномерных проблем в телекоммуникации, предполагая, что будущие достижения также могут зависеть от использования других недостаточно используемых физических явлений или вычислительных парадигм [8].

2. Основы технологии SISO

Принципы работы и архитектура. Система беспроводной связи, которая использует одну антенну для передачи и одну для приема данных называется SISO [5, 7]. Данная конфигурация является базовой и традиционной в радиотехнике. Архитектура SISO отличается простотой, что приводит к снижению сложности аппаратного обеспечения и экономической эффективности [5, 7].

В системах распределенных антенн (Distributed Antenna System, DAS) технология SISO позволяет развертывать отдельные антенны в различных местах для улучшения покрытия сигнала и пропускной способности в определенной области.

Математическая модель канала связи SISO. Математическая модель канала SISO описывает взаимосвязь между передаваемым и принимаемым сигналом.

Входное-выходное соотношение канала SISO может быть представлено следующим образом [9]:

$$y(t) = h s_r(t) + n(t), r = 0, \dots, M - 1, t \in [0, T], \quad (1)$$

где $y(t)$ – принятый комплексный сигнал (отсчет на стороне приемника); $s_r(t)$ – переданный информационный символ (со средней энергией E_r); h – комплексный коэффициент передачи (замирания) скалярного радиоканала. Его амплитуда характеризует затухание, а фаза – сдвиг фазы радиосигнала. Чаще всего модель h описывается как комплексная случайная величина с рэлеевским или райсовским законом распределения; $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) в форме комплексной случайной величины $a \in \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$, где $\sigma_n^2 = N_0/2$ и N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности шума. Для рэлеевских замираний квадратурные составляющие имеют нулевое математическое ожидание, а для райсовских замираний одна из квадратурных составляющих имеет ненулевое математическое ожидание. Пропускная способность канала Шеннона. Теоретически максимальная скорость передачи данных (пропускная способность) канала SISO определяется теоремой Шеннона-Хартли [5, 9]:

$$C = F \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{N_0 F} \right), \quad (2)$$

где C – пропускная способность канала, измеряемая в битах в секунду (бит/с) или, при нормализации по полосе пропускания, в бит/с/Гц; F – полоса пропускания в герцах, диапазон частот, доступный для передачи сигнала (Гц); P_c – средняя мощность сигнала.

Согласно теореме Шеннона-Хартли применительно для SISO-канала, существует принципиальное ограничение: рост пропускной способности при увеличении отношения $P_c/N_0 \gg 1$ подчиняется логарифмическому закону, что накладывает фундаментальные ограничения на эффективность системы. Например, при SNR 10 дБ нормированная пропускная способность C/F составляет приблизительно 3,459 бит/с/Гц, тогда как при SNR 20 дБ (в 10 раз большая мощность) она увеличивается лишь до 6,658 бит/с/Гц. Такое физическое ограничение делает SISO непригодным для удовлетворения требований к высокой скорости передачи данных и большой пропускной способности, что напрямую стимулирует поиск альтернативных подходов к этой проблеме [10]. Практическим следствием этого является то, что достижение даже малого линейного увеличения пропускной способности требует экспоненциального увеличения SNR, а следовательно, и передаваемой мощности, что делает эффективное по мощности масштабирование скорости передачи данных чрезвычайно сложным и дорогостоящим. Указанная неэффективность увеличения пропускной способности напрямую приводит к ограничениям SISO в современных беспроводных сетях, интенсивно использующих данные и объясняет, почему был необходим новый технический подход, такой как MIMO. Еще одна из попыток увеличения характеристик – это переход к многомерным системам, таким, например, как OFDM.

Типичные применения и ограничения. Системы SISO идеально подходят для беспроводной связи в небольших помещениях, таких как дома

или малые офисы, где развертывание нескольких антенн нецелесообразно. Они обеспечивают надежную связь в замкнутых пространствах и используются для улучшения покрытия Wi-Fi в жилых помещениях.

Однако основное ограничение SISO заключается в его ограниченной способности использовать пространственное разнесение для улучшения пропускной способности данных. Это означает, что системы SISO более подвержены замираниям и помехам, поскольку полагаются на один путь распространения сигнала. Архитектурная простота и экономичность SISO напрямую связаны с его ограничениями в производительности. Фактически это классический инженерный компромисс, при котором снижение сложности достигается за счет отсутствия использования расширенных возможностей, таких как пространственное разнесение. Подобное решение определяет нишу SISO среди всего многообразия технологий беспроводной связи.

Промежуточные технологии: SIMO (Single Input Multiple Output) и MISO (Multiple Input Single Output). Между классической SISO и полномасштабной MIMO-архитектурой лежат две промежуточные технологии: SIMO и MISO. В рамках данных подходов для борьбы с глубокими замираниями многолучевого канала используется эффект пространственного разнесения. Однако на практике достичь полноценного выигрыша на передаче (MISO) позволяет лишь совместное использование пространственных ресурсов с методами временного или частотного разнесения (что реализуется применением ортогональных пространственно-временных STBC

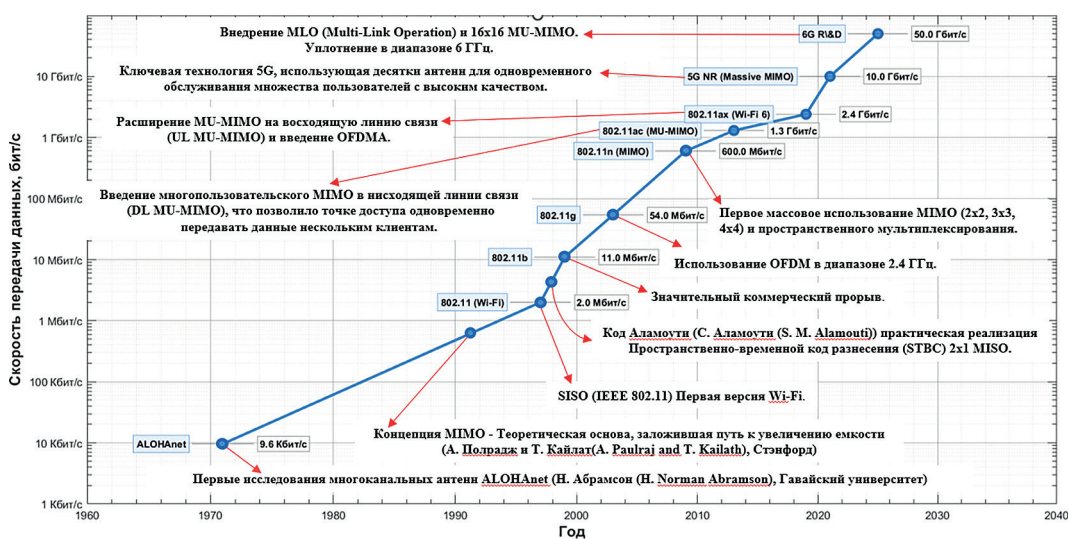


Рис. 1. Ретроспективный анализ развития стандартов беспроводной связи: влияние внедрения технологий пространственного кодирования и систем MIMO на рост скорости передачи данных

(Space-Time Block Coding, код Аламоути) [11] или пространственно-частотных блочных кодов. В системах SIMO передатчик использует одну антенну, а приемник – несколько антенн. Прием нескольких копий одного и того же сигнала, прошедших через разные пространственные пути, позволяет приемнику эффективно бороться с замираниями. Это достигается методами пространственного разнесения антенн: Выбор (Selection Combining) приемник постоянно анализирует качество сигнала на каждой из антенн и выбирает для обработки сигнал с наилучшим отношением сигнал/шум. Комбинирование (Combining): Сигналы со всех антенн комбинируются (к примеру, методом максимального отношения) для формирования результирующего сигнала с более высоким SNR. Каждый сигнал умножается на комплексный коэффициент, пропорциональный его амплитуде и синфазно выравнивается. Данная операция приводит

к когерентному сложению полезных сигналов и некогерентному сложению шумов.

Системы MISO, напротив, имеют несколько антенн на передающей стороне и одну на приемной. Преимущество достигается за счет разнесения на передаче. Наиболее распространенным методом является пространственно-временное кодирование STC (Space-Time Coding) частный, но самый известный случай – код Аламоути, при котором одни и те же данные передаются с разных антенн, но в разные моменты времени и в определенной кодовой последовательности.

3. Основы технологии MIMO.

Принципы работы и преимущества

Технология MIMO стала технологическим скачком благодаря тому, что использует несколько антенн на передающей и принимающей сторонах. Это дает двойной выигрыш: повышает скорость передачи (пропускную способность)

Таблица 1.

Классификация технологий MIMO (SISO, SIMO, MISO, MIMO)

Характеристика/технология	SISO (Single-Input Single-Output)	SIMO (Single-Input Multiple-Output)	MISO (Multiple-Input Single-Output)	MIMO (Multiple-Input Multiple-Output)
Количество антенн	1 передающая антенна (L_t), 1 приемная антенна (L_r).	1 передающая антенна (L_t), >1 приемных антенн (L_r).	>1 передающих антенн (L_t), 1 приемная антенна (L_r).	>1 передающих антенн (L_t), >1 приемных антенн (L_r).
Принцип работы	Стандартный радиоканал. Один поток данных.	Разнесенный прием (Receive Diversity). Повышение надежности за счет выбора лучшего сигнала из нескольких.	Разнесенная передача (Transmit Diversity). Повышение качества сигнала на приемнике.	Пространственное мультиплексирование или разнесение, формирование луча.
Достоинства	Простота и низкая стоимость.	Повышенная надежность и устойчивость к замираниям.	Улучшенное качество и мощность сигнала на приемной стороне.	Более высокая скорость передачи данных, высокая помехоустойчивость и увеличенная пропускная способность сети.
Недостатки	Низкая скорость и слабая надежность. Чувствительность к многолучевому распространению.	Не увеличивает максимальную пропускную способность.	Не увеличивает максимальную пропускную способность; сложнее, чем SIMO.	Высокая сложность обработки сигнала и стоимость.
Сложность реализации	Минимальная.	Низкая (на стороне приемника).	Средняя (на стороне передатчика).	Высокая (на обеих сторонах).
Область применения	Wi-Fi роутеры «старого парка» (802.11b/g), AM/FM радио.	Приемники в мобильных телефонах, базовые станции (на приём).	Средства обеспечения качества обслуживания (QoS) в 4G	Современные стандарты Wi-Fi (802.11n/ac/ax), мобильная связь 4G (LTE) и 5G, 6G

и улучшает надежность связи [5]. Основной принцип работы MIMO заключается в одновременной передаче и приеме нескольких потоков данных в одном и том же частотном диапазоне за счет использования пространственного разнесения беспроводного канала.

Системы MIMO играют решающую роль в современных беспроводных сетях, обеспечивая более высокую скорость передачи данных, высокую помехоустойчивость и увеличенную пропускную способность сети [7, 12].

Ключевые методы MIMO: пространственное разнесение, пространственное мультиплексирование, формирование луча. Три основные методики, используемые в MIMO, часто применяются в совокупности для достижения максимальной пропускной способности и надежности [12].

Пространственное разнесение (Spatial Diversity). Данный метод включает передачу одного и того же потока данных по нескольким независимым каналам, создаваемым пространственно разделенными антеннами (на расстоянии не менее половины длины волны). Он использует независимые замирания в нескольких антенных каналах для повышения помехоустойчивости сигнала [6, 12]. Основное преимущество пространственного разнесения заключается в компенсации эффектов замираний и помех, что приводит к повышению надежности и устойчивости сигнала. Различают разнесение на передаче (несколько передающих, одна принимающая антенна) и разнесение на приеме (одна передающая, несколько принимающих антенн).

Пространственное мультиплексирование (Spatial Multiplexing). Такой подход предполагает одновременную передачу нескольких независимых потоков данных через несколько передающих антенн. Эти потоки разделяются на приемной стороне с помощью пространственной обработки. Главное преимущество пространственного мультиплексирования – значительное увеличение пропускной способности данных и повышение спектральной эффективности без необходимости использования дополнительной полосы пропускания. Однако при использовании указанного метода обычно теряется выигрыш от разнесения, что означает, что он может быть более подвержен замираниям, если не комбинируется с другими методами.

Формирование луча (Beamforming) [6]. Формирование луча в MIMO системах включает фокусировку сигнала в определенном направлении для достижения максимально возможного усиления на принимающей стороне. Данный метод требует знания состояния канала CSI (Channel State Information) на передатчике. Существуют

три основные техники формирования луча: аналоговая (выполняется с помощью фазированных антенных решеток), цифровая (использует предварительное кодирование с модулированными потоками данных для создания диаграммы направленности) и комбинированная (сочетание аналоговой и цифровой). Преимущество формирования луча заключается в улучшении SNR и снижении помех для других пользователей. MIMO представляет собой не единое решение, а многогранную структуру, предлагающую различные преимущества: повышение помехоустойчивости через разнесение, увеличение пропускной способности через мультиплексирование и снижение влияния помех через формирование луча. Высокая адаптивность является ключевым фактором широкого распространения MIMO в различных беспроводных стандартах, таких как Wi-Fi, 4G (Fourth Generation) и 5G (Fourth Generation).

Конфигурации и типы MIMO. Конфигурации MIMO обычно обозначаются как $L_r \times L_t$, где L_t – количество передающих антенн, а L_r – количество принимающих антенн [8]. Распространенные конфигурации включают 2×2 , 4×4 и 8×8 . Выбор конфигурации зависит от конкретного применения и желаемой производительности, например, для конфигурации 2×2 с шириной канала 40 МГц скорость передачи составляет до 300 Мбит/с, тогда как при реализации конфигураций 4×4 или 8×8 с шириной канала 80 МГц скорости передачи могут достигать от 1,7 Гбит/с до 4,8 Гбит/с. Высшие порядки конфигураций MIMO (например, 64×64 для Massive MIMO в 5G) могут обеспечить более высокие скорости передачи данных и улучшенную спектральную эффективность, но они также увеличивают сложность систем.

Существует несколько типов MIMO:

SU-MIMO (Single-User MIMO). Система «точка-точка», или однопользовательская канальная, используется для улучшения скорости передачи данных для одного пользователя. Широко применяется в сетях Wi-Fi (IEEE 802.11n, 802.11ac, 802.11ax) и 4G LTE (Long-Term Evolution) [10]. Ресурсы выделяются исключительно одному пользователю устройству.

MU-MIMO (Multi-User MIMO). Система «точка-многоточка», сетевая. Используется для одновременного обслуживания нескольких пользователей, что увеличивает общую пропускную способность сети. Широко применяется в сетях 5G [11]. Выделяет нескольких пользователей одному ресурсу времени-частоты.

Влияние конфигураций MIMO на производительность системы можно суммировать в следующей таблице 2:

Таблица 2.

Влияние конфигураций ММО на производительность системы

Конфигурация ММО	Скорость передачи данных	Спектральная эффективность	Сложность
2 × 2	Низкая-Умеренная	Низкая-Умеренная	Низкая
4 × 4	Умеренная-Высокая	Умеренная-Высокая	Умеренная
8 × 8	Высокая-Очень Высокая	Высокая-Очень Высокая	Высокая

4. Математическая модель канала связи ММО

В системах ММО на передающей и приемной сторонах используются многоэлементные антенны или антенные решетки. Пусть рассматривается канал связи в многоантенной системе связи с L_t передающими и L_r приемными антеннами. Заметим, что пропускная способность в канале связи с замираниями и большим отношением сигнал/шум в $L_{\min}(L_t, L_r)$ раз больше пропускной способности канала без многоэлементных антенн. На передающей стороне формируется комплексный векторный сигнал s размерности $L_t \times 1$, компонентами которого являются сигналы s_m , $m = 0, \dots, L_t - 1$, передаваемые через $(m + 1)$ -ю антенну. Матрица канала связи $\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + i\mathbf{H}_s$, $i^2 = -1$ является комплексной прямоугольной матрицей размерности $L_r \times L_t$. Компонент матрицы канала $h_{km} = [\mathbf{H}]_{km}$ представляют собой комплексный коэффициент передачи канала связи от m -й передающей антенны к k -й приемной антенне и являются случайной величиной, имеющей нормальное распределение, $h_{km} \in \mathcal{CN}(a_{km}, \sigma_{km}^2)$, $k = 0, \dots, L_r - 1, m = 0, \dots, L_t - 1$, т. е. имеют различное математическое ожидание и дисперсию для всех возможных путей от m -й передающей к k -й приёмной антенне. В частности, при $|h_{km}| \in \mathcal{CN}(0, 1)$ имеет рэлеевское распределение и $|h_{km}|^2$ – экспоненциальное (показательное) распределение с единичным математическим ожиданием, $\mathbb{E}[|h_{km}|^2] = 1$. Следовательно, $\mathbb{E}[\|\mathbf{H}\|_F^2] = L_t L_r$, где норма Фробениуса для матрицы $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{i,j=1}^{r,t}$ размерностью $r \times t$ определяется как $\|\mathbf{M}\|_F^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^t |m_{ij}|^2$. $\|\mathbf{M}\|_F^2 = \text{tr}(\mathbf{M}\mathbf{M}^H) = \text{tr}(\mathbf{M}^H\mathbf{M})$, где $\text{tr} \mathbf{X}$ – след матрицы \mathbf{X} . Будем полагать, что энергия сигнала в каждой приемной антенне равна суммарной энергии сигналов, излучаемых всеми L_t передающими антеннами.

Математическая модель канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом (AWGN, Additive White Gaussian Noise) имеет вид [9]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (3)$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{L_r \times 1}$ – комплексный вектор принимаемого сигнала размером $L_r \times 1$; $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{L_r \times L_t}$ – матрица

канала связи, компоненты которой, в общем случае, являются случайными процессами или случайными величинами; \mathbf{s} – передаваемый сигнал, $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{L_t \times 1}$, где E_s – средняя энергия сигнала, используемая одной передающей антенной; $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{L_r \times 1}$ – комплексный вектор аддитивного белого гауссовского шума размером $L_r \times 1$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\mathbf{R}_n = \mathbb{E}[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = N_0 \mathbf{E}_{L_r} = 2\sigma_n^2 \mathbf{E}_{L_r}$, где N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности шума и \mathbf{E}_{L_r} – единичная матрица размером $L_r \times L_r$, т. е. $\mathbf{n} \in \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2 \mathbf{E}_{L_r})$. Таким образом, предполагается, что дисперсии шума во всех приемных антеннах являются одинаковыми. Данное ограничение не является существенным. Так, если дисперсии различны, то можно, например, рассматривать максимальную дисперсию. Нетрудно убедиться, что ковариационная матрица для сигнала определяется как $\mathbf{R}_{ss} = \mathbb{E}[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = E_s \mathbf{E}_{L_t}$ и, соответственно, $\mathbb{E}[\mathbf{s}^H \mathbf{s}] = E_s L_t$. Таким образом, (3) определяет векторный гауссовский канал.

Заметим, что если $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]$ случайная матрица размером $m \times n$, полученная из n случайных независимых векторов размерами $m \times 1$ с ковариационной матрицей $\mathbf{R}: \mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]$, где $\text{cov}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{R}$, $k = 1, \dots, n$, то тогда ковариационная матрица имеет размерность $mn \times nm$ $\text{cov}[\text{vec}(\mathbf{X})] = \mathbf{E}_n \otimes \mathbf{R}$, где $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ – произведение Кронекера матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} . Если квадратная матрица \mathbf{X} размерностью $n \times n$ имеет ранг r , а случайная матрица \mathbf{H} размерностью $p \times n$ элементы которой нормальные случайные величины с невырожденной ковариационной матрицей, то тогда с вероятностью 1 справедливо соотношение $\text{rang}(\mathbf{H}\mathbf{X}\mathbf{H}^T) = \min(r, p)$ [5].

Разложение по сингулярным значениям SVD (Singular Value Decomposition) и собственные каналы. Матрица канала (\mathbf{H}) может быть разложена с использованием сингулярного разложения (SVD) [8]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H, \quad (4)$$

где \mathbf{H} – унитарные матрица $L_t \times L_r$, описывает взаимодействие между L_t передающими и L_r

приемными антеннами. Унитарная матрица удовлетворяет условию $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$, где \mathbf{U}^H – эрмитово-сопряженная матрица (транспонированная и комплексно-сопряженная). Данная матрица представляет вращение или отражение в пространстве принимающих антенн; $\mathbf{\Sigma}$ – диагональная матрица, сингулярных значений $L_t \times L_r$. На главной диагонали матрицы расположены сингулярные значения σ_i , которые являются неотрицательными действительными числами и обычно упорядочены по убыванию. Сингулярные значения представляют собой «усиления амплитуды» независимых параллельных каналов, которые могут быть сформированы с помощью SVD.

Вне главной диагонали все элементы равны нулю $\mathbf{\Sigma} = [\text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{L_r}) | 0_{L_r, L_t - L_r}]$, $L_t \geq L_r$. Матрица \mathbf{V}^H – эрмитово-сопряженная (транспонированная и комплексно-сопряженная) унитарная матрица размером $L_t \times L_r$. Определяет оптимальное преобразование сигнала на передающей стороне (предкодирование) для направления независимых потоков данных в ортогональные каналы.

Сингулярное разложение доказывает, что MIMO-канал эквивалентен набору L_{\min} параллельных, независимых SISO-каналов, где $L_{\min} = \min(L_r, L_t)$, каждый из которых имеет коэффициент усиления, равный соответствующему сингулярному числу σ_i . По сути, SVD позволяет разделить MIMO канал на несколько ортогональных, независимых подканалов. Это ключевая концепция для достижения высоких скоростей передачи данных в MIMO системах, поскольку позволяет оптимально распределить мощность по подканалам (к примеру, с использованием «водоналивного» (water-filling algorithm) [5, 8] алгоритма и передавать по ним независимые потоки данных.

Пропускная способность канала MIMO. Пропускная способность MIMO-канала является суммой пропускных способностей независимых пространственных каналов, когда предполагается, что передатчик знает полную информацию о состоянии канала:

$$C = F \sum_i \log_2 \left(1 + \frac{P_i \lambda_i^2}{N_0} \right), \quad (5)$$

где C – общая пропускная способность MIMO канала в бит/с; F – полоса частот; r – ранг матрицы канала (число независимых пространственных каналов, $r \leq \min(L_t, L_r)$). Это так же соответствует количеству ненулевых сингулярных значений (количество независимых параллельных подканалов), которые могут быть сформированы с помощью SVD; P_i – мощность, распределенная

по i -му пространственному каналу; λ_i^2 – i -е собственное число матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ [6, 10].

В том случае, когда передатчик не обладает информацией о состоянии канала, пропускная способность рассчитывается следующим образом:

$$C = \mathbb{E} \left[F \log_2 \left(\det \left(\mathbf{E}_{L_r} + \frac{SNR}{L_t} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right) \right], \quad (6)$$

где $\mathbb{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания; SNR – отношение сигнал/шум; L_t – количество передающих антенн; L_r – количество приемных антенн; H – матрица канала; $\det \mathbf{A}$ – определитель матрицы \mathbf{A} ; \mathbf{E}_{L_r} – единичная матрица размера $L_r \times L_r$.

Важно отметить, что пропускная способность MIMO увеличивается линейно с количеством антенн, в отличие от систем SISO/SIMO/MISO, которые увеличиваются только логарифмически [10]. Вышеуказанное линейное масштабирование является основным преимуществом. Ранг матрицы \mathbf{H} (количество ненулевых сингулярных значений σ_i определяет количество пространственных степеней свободы, что указывает на то, сколько независимых потоков данных может быть поддержано [8]).

Фактическая пропускная способность и прирост производительности системы MIMO в значительной степени зависят от характеристик беспроводного канала, в частности от его ранга и сингулярных значений, выявляемых SVD. Это означает, что теоретические «линейные» приросты зависят от наличия среды с активным многолучевым распространением. Например, при прямой видимости LOS (Line Of Site) канал MIMO обеспечивает прирост мощности, но не прирост степеней свободы, поскольку матрица канала имеет ранг, равный единице. Напротив, многолучевое замирание может быть полезным, если пути имеют значительное угловое разделение, что увеличивает ранг матрицы.

Точное моделирование и своевременная оценка параметров канала связи являются важными условиями для полной реализации потенциала MIMO систем, так как от этих факторов напрямую зависит пропускная способность и помехоустойчивость. Производительность MIMO не является универсальной, она неразрывно связана со средой распространения. Поэтому точная оценка канала и адаптивные стратегии передачи, такие как «водоналивной» алгоритм (water-filling algorithm), имеют решающее значение для оптимизации производительности MIMO в реальных сценариях.

Применение в современных беспроводных стандартах. Технология MIMO широко применяется в различных стандартах беспроводной

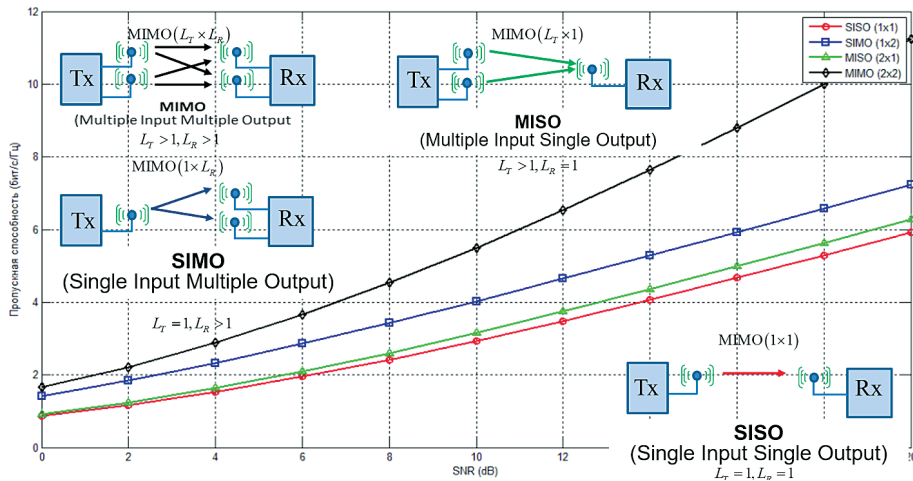


Рис. 2. Сравнение пропускной способности технологии MIMO (SISO, SIMO, MISO, MIMO)

связи: Wi-Fi: используется в стандартах IEEE 802.11n, 802.11ac и 802.11ax для повышения скорости передачи данных и пропускной способности сети. 4G (Long-Term Evolution): применяется в сетях LTE для увеличения скорости передачи данных и спектральной эффективности. Технология 5G (New Radio): является ключевой технологией в сетях беспроводной передачи данных, обеспечивая более высокие скорости передачи данных, меньшую задержку и увеличенную пропускную способность сети, включая Massive MIMO. Интеграция MIMO с ортогональным частотным мультиплексированием OFDM (Orthogonal Frequency-Division Multiplexing) приводит к значительному увеличению спектральной эффективности, поскольку выигрыш от пространственного мультиплексирования, предлагаемый MIMO, используется в сочетании с многоканальной модуляцией. Выигрыш от разнесения, достигаемый технологией MIMO, также может повысить стабильность соединения и обеспечить высокое качество обслуживания QoS (Quality Of Service).

5. Демодуляция методом обнуления для случайной матрицы канала связи

Известно несколько алгоритмов демодуляции на приемной стороне: Метод обнуления – ZF [15, 16]; Метод демодуляции по критерию минимума среднеквадратической ошибки – MMSE; Метод максимального правдоподобия – ML (Maximum Likelihood), используемый в многоантенных системах на основе архитектуры BLAST (Bell Laboratories Layered Space Time). Первые два неоптимальных метода относятся к линейным приемникам, которые включают в себя линейное преобразование полученного вектора

и из-за их возможности снижения сложности часто применяют на практике. В этом случае принятый сигнал уфилтрруется линейным фильтром с подавлением мешающих сигналов. Известно, что при $L_r \gg L_t \gg 1$ линейные приемники, используемые в massive MIMO, приближаются к оптимальным приемникам.

Из (3) следует, что ковариационная матрица принимаемого сигнала определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= \mathbb{E}[\mathbf{y}\mathbf{y}^H] = \mathbf{H}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{H}^H + \mathbb{E}[\mathbf{nn}^H] = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{E}_{L_r}, \end{aligned}$$

где ковариационная матрица передаваемого сигнала $\mathbf{R}_{ss} = E_s\mathbf{E}_{L_t}$, с учетом предположения о равномерном распределении энергии на передающей стороне, т. е. в предположении, что сигналы, излучаемые передающими антеннами, имеют одинаковую энергию E_s . Таким образом, $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{H}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{H}^H + N_0\mathbf{E}_{L_r}$, $\mathbf{R}_{ss} = E_s\mathbf{E}_{L_t}$, $\mathbf{R}_n = N_0\mathbf{E}_{L_r}$. В общем случае, при использовании линейного приемника используется некоторое линейное преобразование $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ зависящее от матрицы канала связи \mathbf{H} : $\hat{\mathbf{s}} = \mathcal{L}(\mathbf{H})\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathcal{L}(\mathbf{H})\mathbf{n}$. В качестве соответствующего линейного преобразования выбирается матрица \mathbf{A} , такая, что $\mathbf{A}\mathbf{H}$ представляет собой диагональную матрицу: $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}) = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{A}\mathbf{n}$. Суть метода обнуления заключается в умножении обратной матрицы \mathbf{G}_{ZF} на вектор принятых отчетов [16]: $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G}_{ZF}\mathbf{y} = \mathbf{G}_{ZF}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}) = \mathbf{s} + \mathbf{G}_{ZF}\mathbf{n}$, где $\mathbf{G}_{ZF} = \mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$ – псевдообратная матрица канала. Ковариационная матрица шума, влияющего на принятие решения после произвольного линейного преобразования \mathbf{G} , имеет следующий вид: $\mathbf{R}_{G,n} = \mathbb{E}[(\mathbf{G}\mathbf{n})(\mathbf{G}\mathbf{n})^H] = \mathbf{G}\mathbf{R}_n\mathbf{G}^H$. Следовательно,

отношение сигнал/шум на выходе ZF приемника в k -й ветви определяется как

$$\gamma_{ZF,k} = \left[\frac{\mathbf{R}_{ss}}{\mathbf{R}_{ZF,n}} \right]_{kk} = \left[\frac{E_s \mathbf{E}_{L_t}}{\mathbf{G}_{ZF} N_0 \mathbf{E}_{L_r} \mathbf{G}_{ZF}^H} \right]_{kk} = \frac{\gamma}{[\mathbf{G}_{ZF} \mathbf{G}_{ZF}^H]_{kk}}.$$

Тогда, применяя свойства транспонирования Эрмита, получаем

$$\mathbf{G}_{ZF} \mathbf{G}_{ZF}^H = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H [(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H]^H = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}.$$

Окончательно получаем, что

$$\gamma_{ZF,k} = \frac{\gamma}{[(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}]_{kk}} = \frac{\gamma}{[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}}, \quad (7)$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$ и $\gamma = E_s / N_0$ – отношение сигнал/шум на приемной антенне.

Таким образом, для метода ZF оценочная версия передаваемого вектора символов получается после умножения в математической модели левой и правой части на псевдообратную матрицу \mathbf{H}^\dagger в виде: $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} + \mathbf{H}^\dagger \mathbf{n}$, где используется псевдообратная функция Мура-Пенроуза \mathbf{H}^\dagger , которая равна $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$, если столбцы матрицы \mathbf{H} имеют полный ранг (столбцы линейно независимы) и тогда матрица $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ обратима или $\mathbf{H}^H (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$, если строки матрицы \mathbf{H} имеют полный ранг (строки линейно независимы) и тогда матрица $\mathbf{H} \mathbf{H}^H$ обратима.

Заметим, что

$$\mathbb{E}[[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}] = (L_r - L_t)^{-1}; \quad \mathbb{E}\left[\frac{\gamma}{[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}}\right] = L_r - L_t + 1, \\ k = 1, \dots, L_t.$$

Нетрудно убедиться, что

$$[\mathbf{W}^{-1}]_{km} = -1^{k+m} \det \mathbf{W}_{mk} / \det \mathbf{W},$$

где \mathbf{W}_{mk} определяет минор элемента $[\mathbf{W}]_{km}$. Следовательно,

$$\gamma_k = \frac{\gamma}{[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}} = \frac{\det \mathbf{W}}{\det \mathbf{W}_{kk}} \gamma = \mathbf{W}_{kk}^{sc} \gamma, \quad k = 1, \dots, L_t. \quad (8)$$

Если \mathbf{W} имеет распределение Уишарта, то функция плотности распределения вероятности и, соответственно, функция распределения для γ_k , строгим математическим аппаратом, полученным авторами ранее в [17]:

$$f(\gamma_k) = \frac{1}{\Gamma(L_r - L_t + 1) \gamma_{0,k}} \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_{0,k}}\right)^{L_r - L_t} e^{-\gamma_k / \gamma_{0,k}}, \quad k = 1, \dots, L_t; \\ F(\gamma_k) = \frac{1}{\Gamma(L_r - L_t + 1) \gamma_{0,k}} \gamma \left(L_r - L_t + 1, \frac{\gamma_k}{\gamma_{0,k}}\right), \quad k = 1, \dots, L_t,$$

где $\gamma_{0,k} = \frac{\gamma}{[\mathbf{R}^{-1}]_{kk}}$, $k = 1, \dots, L_t$ и $\Gamma(z)$ – гамма-функция, $\gamma(a, z)$ – неполная гамма-функция.

6. Военное применение технологии MIMO

В условиях перехода к концепции сетевых войн ключевым требованием к системе связи становится обеспечение высокоскоростной передачи мультисервисного трафика (видеоинформация с БПЛА, данные радиолокационной разведки) при сохранении высокой живучести радиолиний. Применение технологии MIMO в военной сфере имеет ряд принципиальных отличий от гражданских сетей (5G/Wi-Fi).

Во-первых, приоритетным свойством систем MIMO специального назначения является не только увеличение пропускной способности (спектральной эффективности), но и повышение помехозащищенности. Многоэлементные антенные системы позволяют реализовать пространственную селекцию сигналов. Алгоритмы пространственной обработки, такие как исследуемый в данной работе метод обнуления ZF, способны формировать «нули» диаграммы направленности в угловых направлениях на источники преднамеренных помех (средства РЭБ противника), обеспечивая функционирование канала связи при отрицательных значениях отношения сигнал/шум.





Во-вторых, эксплуатация средств связи происходит на подвижных объектах вооружения и военной техники (ББМ, танки, КШМ). Габаритные ограничения носителей вынуждают размещать элементы антенной решетки на малом расстоянии друг от друга (менее половины длины волны). Это приводит к возникновению пространственной корреляции каналов, статистические свойства которых описываются распределением Уишарта. Классические алгоритмы приема в таких условиях теряют эффективность, что требует разработки адаптированных методик оценки помехоустойчивости.

В-третьих, технология MIMO критически важна для работы в условиях плотной городской застройки и пересеченной местности (режим NLOS - отсутствие прямой видимости). За счет использования многолучевого распространения радиоволн, которое для традиционных систем связи является деструктивным фактором, системы MIMO обеспечивают устойчивое покрытие и скрытность работы, так как позволяют снизить общую излучаемую мощность при сохранении качества приема за счет выигрыша от разнесения.

Таким образом, внедрение адаптивных алгоритмов MIMO в аппаратуру связи тактического звена является необходимым условием обеспечения информационного превосходства и устойчивости управления войсками в сложной радиоэлектронной обстановке.

Таблица 3.

Изделия БШПД применяющиеся в войсках

Наименование оборудования	«Дина»	InfiLINK 2×2 R5000-Mmx	Радиомост Ubiquiti LiteBeam 5AC-Gen2	Радиомост Ubiquiti LiteBeam M5-23
Внешний вид				
Организация связи	На стоянке «точка-точка», «точка-многоточка»	На стоянке «точка-многоточка», «точка-точка»	На стоянке «точка-точка», «точка-многоточка»	На стоянке «точка-точка», «точка-многоточка»
Диапазон частот, МГц	4900–6000 6050–6400	4900–6050	5170–5875	5170–5875
Мощность ПРД, Вт	0,2	0,5	0,3	0,3
Усиление антенн, дБ	23–28	28	23	23
Пропускная способность, Мбит/с	220–300	280	450	450
Дальность связи, км	80**	40**	10**	5**
Электропитание, В	220	110–240	24	24
Группа исполнения	1.10	класс защиты IP67 (влага, пыль)	IEC-68 (темпер., вибрация)	IEC-68 (темпер., вибрация)
Применение	Сам-ное изделие	Сам-ное изделие	Сам-ное изделие	Сам-ное изделие
Ор. стоимость	1,2 млн. р.	300 т.р	10–12 т.р.	7–9 т.р.
Производственная мощность	1000 в год	Нет данных	Нет данных	Нет данных
Производитель	АО «Воентелеком»	ООО «Инфинет»	Китай	Китай

7. Моделирование каналов в MATLAB

Моделирование в MATLAB представляет собой важный инструмент для подтверждения теоретических моделей и анализа практических компромиссов в производительности систем беспроводной связи. Значительное преимущество моделирования заключается в возможности быстрой оценки производительности и анализа гипотетических сценариев до этапа аппаратной реализации. Таким образом, суть компьютерного моделирования заключается в преобразовании абстрактных математических принципов в четкие, измеримые результаты. Это укрепляет понимание систем и обеспечивает основу для принятия практических инженерных решений.

Для верификации полученных аналитических выражений и исследования поведения системы

в условиях реальной сигнально-помеховой обстановки была разработана имитационная модель канала MIMO в среде MATLAB. Анализ помехоустойчивости линейного демодулятора обнуления ZF проводился в условиях плоских рэлеевских замираний с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ). Главной задачей моделирования являлось подтверждение способности предложенной математической методики безошибочно прогнозировать вероятность битовой ошибки системы без проведения длительных ресурсоемких стохастических симуляций во всем рабочем диапазоне отношения сигнал/шум.

Традиционные методы оценки помехоустойчивости детектора ZF часто базируются на грубых асимптотических приближениях (например, границах Чернова) и имеют погрешности

в области низких и средних значений E_s / N_0 . В отличие от них, в предложенном подходе используется точный математический расчет, опирающийся на статистические свойства инвертированной матрицы канала.

Известно, что вероятность ошибки P_b на приемной стороне при когерентном приеме многопозиционных сигналов может быть выражена как алгебраическая сумма интегральных T -функций Оуэна [1]. Поскольку в методе обнуления отношение сигнал/шум на символ после обработки имеет χ^2 -распределение, определяемое степенью свободы обратной матрицы Уишарта, математическое ожидание (эргодическая вероятность) сводится к вычислению специальных полиномов. Данный математический аппарат позволяет получить строгие количественные оценки BER без использования ресурсоемкого численного интегрирования.

Исходное уравнение для вероятности ошибки выражается суммой T -функций Оуэна [1]:

$$P_{e/b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\sqrt{2g_k \gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (9)$$

где γ_{bc} – отношение средних энергий на один бит к спектральной плотности шума; $T(z, a)$ – интегральная функция Оуэна строго определяемая математическим выражением вида:

$$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{e^{-(1+t)z^{2\pi}}}{1+t^2} dt, \quad |\arg a| < \pi,$$

а коэффициенты g_k, η_k зависят от параметров применяемой многомерной сигнальной конструкции. Для канала с рэлеевскими замираниями математическое ожидание функции Оуэна сводится к \mathcal{H} -функции [1]:

$$\mathbb{E}T[\sqrt{2g\gamma_{bc}}, \eta] = \mathcal{H}_{L_r - L_t + 1} \left(0; \sqrt{\frac{g\gamma_{0,k}}{g\gamma_{0,k} + 1}} \eta \right), \quad (10)$$

где $\mathcal{H}_v(z; a, b)$ – специальная интегральная функция, при ($v \geq 0, 0 \leq a^2 \leq 1$) задается следующим образом:

$$\mathcal{H}_v(z; a, b) = \frac{(1-a^2)^v}{2\pi} \int_0^b \frac{1}{(1+x^2)(1+a^2x^2)^v} \exp\left(\frac{z^2}{2} \frac{1+x^2}{1+a^2x^2}\right) dx.$$

В частном случае, когда определяется математическое ожидание от функции Гаусса, т.к. $T(z, \infty) = \frac{1}{2}Q(z)$, то:

$$\mathcal{H}_n(0, b, \infty) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-b}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1+b}{2} \right)^k. \quad (11)$$

В данном выражении параметр $b = \sqrt{\gamma / (1 + \gamma)}$ обусловлен эквивалентным отношением сигнал/шум, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ биномиальный коэффициент, а $L_{div} = L_r - L_t + 1$ строго определяет порядок пространственного разнесения, обеспечиваемый избыточностью приемных антенн. Именно эта формула легла в основу аналитического расчета для сравнительного графического анализа.

Полученные графические зависимости раскрывают специфику работы метода обнуления в многоантенных системах и полностью доказывают корректность заявленной методики. В первую очередь стоит отметить полное визуальное наложение экспериментальных данных Монте-Карло (точечные маркеры), усредненных по репрезентативной выборке независимых матриц рэлеевского канала, на аналитические кривые (сплошные линии), полученные через вычисление функции \mathcal{H}_n . Такое совпадение,

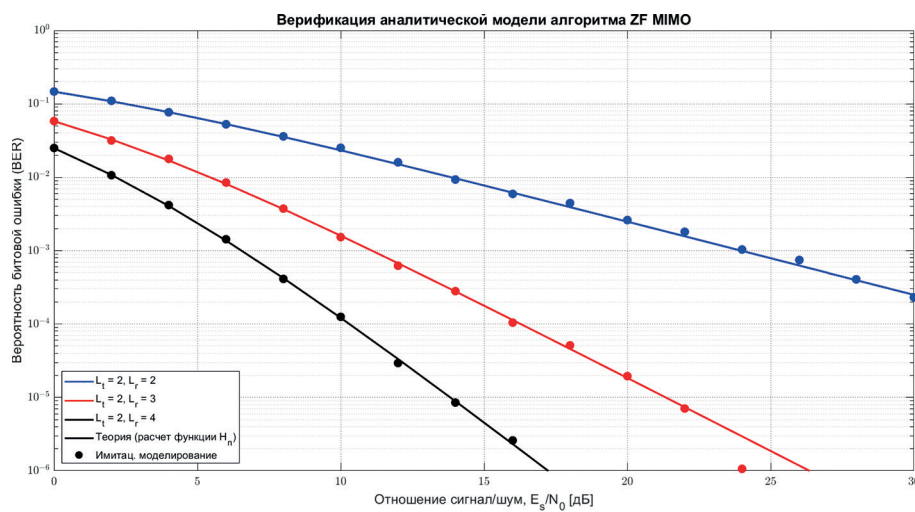


Рис. 3. Верификация аналитической модели алгоритма ZF MIMO при приеме сигналов с двоичной фазовой манипуляцией (BPSK): сопоставление теоретических расчетов при использовании $\mathcal{H}_v(z; a, b)$ функции (сплошные линии) с результатами имитационного Монте-Карло моделирования (маркеры)

наблюдаемое во всем исследуемом диапазоне E_s / N_0 , включая область глубоких замираний (при $BER > 10^{-4}$), наглядно верифицирует математическую точность применения аппарата специальных функций. Расчет через указанную конечную сумму дает возможность избегать аппроксимаций для вероятности ошибки.

Кроме того, рисунок прямо подтверждает зависимость устойчивости детектора обнуления от конфигурации приемных антенн (условия эффективности). В базовой конфигурации без избыточного приема ($L_t = 2, L_r = 2$) параметр пространственного разнесения минимален $L_{div} = 1$. Из-за высокой чувствительности инвертированной квадратной матрицы к глубоким замираниям (и возникающему эффекту усиления шума), кривая ошибки снижается линейно, требуя завышенных энергетических затрат. Однако интеграция конфигураций с избыточным приемом $L_r > L_t$ коренным образом меняет динамику системы. Увеличение числа приемных элементов (кривая $L_r = 3$, разнесение $L_{div} = 2$, и $L_r = 4$, разнесение $L_{div} = 3$) позволяеткратно улучшить наклон «водопадных» характеристик. За счет достигнутого порядка разнесения метод обнуления становится оптимальным выбором для высокоскоростной передачи: он позволяет линейно снизить вероятность ошибки без усложнения аппаратной реализации детектора.

Одним из наиболее серьезных фундаментальных ограничений использования линейного метода обнуления в конфигурациях MIMO является физическая уязвимость матричного инвертирования в случае корреляции потоков или пространственных замираний канала (при отсутствии избыточного приема). В условиях сложной помехи квадратная матрица канала часто

бывает плохо обусловлена (вырождена). Прямое обращение вырожденных матриц провоцирует математический эффект сингулярности, результатом которого на практике становится критическое многократное увеличение (amplification) мощности дисперсии аддитивного шума, полностью искажающего декодируемый сигнал на выходе приемника. Для устранения данного недостатка и выравнивания помехоустойчивости применяют модификацию детектора обнуления на основе критерия минимума среднеквадратической ошибки (MMSE, Minimum Mean Square Error). Анализируя теоретическую природу усиления шума, необходимо рассмотреть весовые матрицы фильтров демодуляции: Линейное преобразование детектора ZF для вектора оценок сигналов определяется весовой матрицей: $\mathbf{G}_{ZF} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$. Очевидно, что в вырожденных ситуациях $\det(\mathbf{H}^H \mathbf{H}) \approx 0$ собственные значения инверсной ковариационной матрицы экспоненциально возрастают, усиливая тем самым тепловой аддитивный шум системы \mathbf{n} при перемножении: $\hat{\mathbf{s}}_{ZF} = \mathbf{s} + \mathbf{G}_{ZF} \mathbf{n}$. Во избежание данного деструктивного эффекта детектор MMSE включает в матрицу расчета диагональную нагрузку (регуляризатор):

$$\mathbf{G}_{MMSE} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H} + (N_0 / E_s) \mathbf{E})^{-1} \mathbf{H}^H, \quad (12)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица соответствующего размера. Введенное слагаемое N_0 / E_s , эквивалентное значению обратного отношения сигнал/шум (уравнение получено с учетом равенства $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, сдвигает спектр собственных значений и гарантирует жесткое ограничение роста коэффициентов матрицы \mathbf{G}_{MMSE} . С точки зрения энергетических процессов, фильтр MMSE представляет собой компромисс между

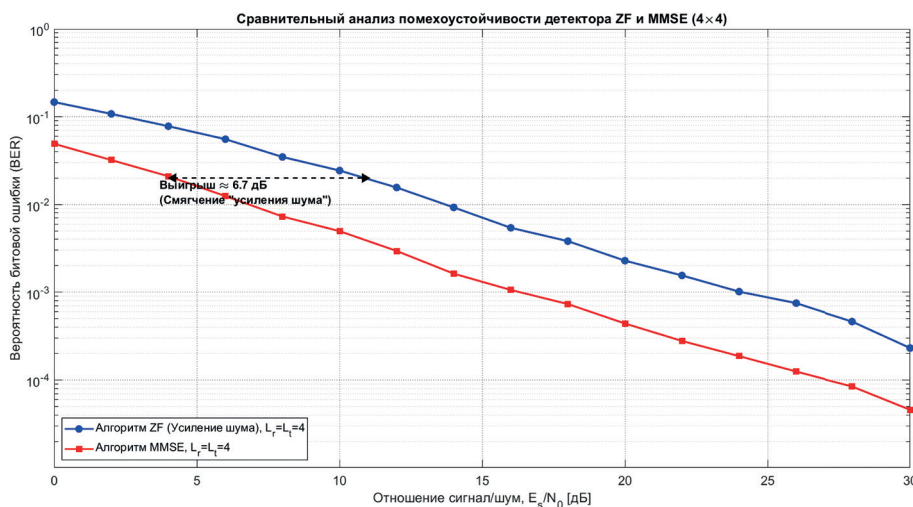


Рис. 4. Сравнительный анализ помехоустойчивости линейных детекторов ZF и MMSE в условиях симметричного канала связи без избыточного пространственного приема (система 4×4, модуляция BPSK). Эффект компенсации усиления шума

полным подавлением многоантенной интерференции потоков и ограничением уровня аддитивного шума, тем самым решая главную проблему ZF. В области предельно высоких отношений сигнал/шум $N_0/E_s \rightarrow 0$ оба алгоритма совпадают и метод MMSE переходит в стандартное уравнение ZF, что и наблюдается асимптотически:

$$\mathbf{G}_{MMSE} | N_0 \rightarrow 0 = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H = \mathbf{G}_{ZF}.$$

Проведенное на рисунке 4 сравнительное имитационное моделирование наглядно раскрывает практический вес математической стабилизации детектора MMSE. Экспериментальные зависимости подтвердили доминирующую роль проблемы «усиления шума» в методе ZF в сложных симметричных каналах ($L_t = L_r = 4$). Видно, что при малых отношениях сигнал/шум (зона до 15 дБ), попытка ZF осуществить идеальное обнуление межканальной интерференции любой ценой приводит к недопустимой мощности теплового шума на выходе – алгоритм крайне медленно уходит из области глубоких ошибок (ниже $P_b = 10^{-2}$). При тех же самых параметрах канальной матрицы \mathbf{H} фильтрация по алгоритму MMSE, учитывающая отношение N_0/E_s , формирует оптимальные весовые векторы-строки, защищая детектор. Это визуализируется устойчивым энергетическим выигрышем. Из графика на рисунке 4 установлено, что для достижения пороговой достоверности качества связи $P_b = 10^{-2}$ в многолучевом канале детектору ZF требуется мощность более X_{ZF} дБ, тогда как для приемника MMSE достаточно мощности X_{MMSE} дБ. Зафиксирован энергетический выигрыш от 3 до 5 дБ по спектру низких отношений сигнал/шум (точная дельта зависит от флуктуации канала и видна по курсорам на рисунке 4). Тем не менее, как и предсказывалось формулами, в асимптотическом случае, когда мощности передатчика достаточно (при $E_s/N_0 > 20$ дБ), коэффициент смещения дисперсии теряет свое влияние: обе кривые уверенно смыкаются и продолжают линейный параллельный ход вниз, формируя идентичный наклон характеристик порядка d .

Полученный количественный результат достоверно подтверждает выводы исследования: хотя математический алгоритм ZF проще в технической реализации (отсутствует необходимость точной аппаратной оценки текущей дисперсии теплового шума), его применение для слабо обусловленных симметричных решеток вызывает высокие потери энергетического бюджета, поэтому в реальных стандартах передачи его чаще разворачивают совместно с алгоритмом избыточного приема конфигурации $L_r \gg L_t$.

Минимизация частоты ошибок, достижимая линейными фильтрами детектирования, неразрывно связана с максимальной скоростью

надежной передачи данных в рассматриваемых средах связи. Для подтверждения целесообразности и оптимальности выбора приемника ZF для высокоскоростных магистралей, необходимо исследовать его предельную спектральную эффективность (эргодическую пропускную способность, C , [бит/с/Гц]) в функции отношения сигнал/шум. Поскольку обнуляющий детектор изолирует пространственные подканалы за счет формирования эквивалентных неинтерферирующих параллельных потоков, информационная емкость напрямую зависит от статистической изменчивости (замираний) каждого выделенного виртуального субканала.

Аналитический базис формирования пропускной способности при использовании приемника ZF опирается на выведенное математическое ожидание диагональных элементов обращенной матрицы ковариаций $\mathbf{W} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$. Мгновенное значение отношения сигнал/шум в k -ом параллельном потоке задается полученными ранее выражениями (7) и (8). С позиций статистической радиотехники строго доказано, что знаменатель этой функции (минор обратной вырожденной матрицы \mathbf{W}) имеет маргинальное хи-квадрат распределение со степенью свободы $2(L_r - L_t + 1)$, что напрямую контролирует параметр дисперсии помехоустойчивости σ_k^2 . Из теории информации эргодическая пропускная способность канала Шеннона с эквализацией по методу ZF вычисляется как математическое ожидание логарифмической емкости:

$$\mathbb{E}[C_{ZF}] = \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left[\sum_{k=1}^{L_t} \log_2(1 + \lambda_k) \right]. \quad (13)$$

Таким образом, степень избыточного приема $L_r > L_t$ выступает ключевым инструментом: увеличивая степени свободы функции распределения замираний Уишарта, мы предотвращаем глубокие флуктуации переменной $[\mathbf{W}^{-1}]_{kk}$, кардинально приближая среднюю пропускную способность субканалов алгоритма обнуления к ее теоретическому асимптотическому пределу гауссовского канала связи.

Представленные на рисунке 5 результаты безоговорочно иллюстрируют математическую оптимальность метода обнуления для конфигураций массивного радиодоступа при условии средних и высоких значений ОСШ. Главный доказываемый критерий эффективности раскрыт через сопоставление кривых спектральной эффективности. Конфигурации 2×2 (синяя сплошная линия) и 4×4 (красная сплошная линия), не обладающие избыточностью приема $L_r = L_t$, теряют существенный резерв энергетической емкости. Для обеспечения пропускной способности $C = 10$ бит/с/Гц в системе 2×2 требуется более 15 дБ соотношения сигнал/шум. Однако

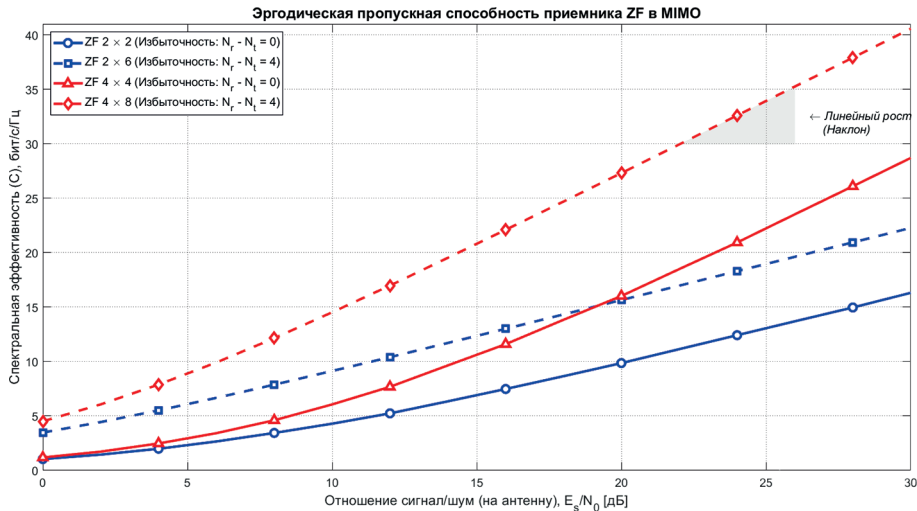


Рис. 5. Динамика эргодической пропускной способности и влияние пространственного избыточного приема при линейном мультиплексировании ZF в рэлеевском канале

стоит применить конфигурацию с антенным избыточным приемом (пунктирные кривые 2×6 и 4×8), где количество $L_r > L_t$, как ситуация коренным образом преобразуется. Полученный порядок разнесения полностью нивелирует провалы канала (замирания), обеспечивая строгий энергетический выигрыш $\approx 5 \dots 7$ дБ по спектральной шкале влево, и устраняя потери «усиления шума». Более того, график надежно фиксирует второй аспект теоретических положений – при переходе рубежа $SNR \geq 15$ дБ характеристика $C(E_s / N_0)$ приобретает форму чистых прямых линейно-восходящих зависимостей независимо от параметров замирания. Система начинает прирастать с постоянной скоростью $L_t \log_2(1 + SNR)$, а значит пропускная способность при применении базового низкобюджетного алгебраического инвертирования ZF масштабируется строго линейно. Следовательно, изложенная методология доказывает целесообразность использования алгоритмов обнуления с избыточным приемным вектором ($L_r \geq 2L_t$), поскольку они обеспечивают пропускную способность, эквивалентную дорогим стохастическим и ML-фильтрам при радикально меньшей аппаратной вычислительной сложности для модемного чипа.

8. Заключение

Ключевые выводы и сравнительный анализ. В ходе данного исследования был проведен углубленный анализ эффективности пространственной фильтрации сигналов в системах MIMO с использованием метода обнуления ZF. Вместо общего сравнения технологий, работа сосредоточена на оценке характеристик конкретного линейного алгоритма детектирования,

что позволило получить следующие значимые результаты:

L_r Будущие направления развития. Развитие MIMO продолжается, и будущие направления исследований включают дальнейшее масштабирование числа антенн в концепциях, таких как Massive MIMO, уже интегрированной в 5G, и Cell-Free Massive MIMO [18], которая обещает еще более равномерное покрытие и пропускную способность за счет распределения большого количества антенн по всей территории обслуживания.

Интеграция искусственного интеллекта и машинного обучения AI (Artificial Intelligence), ML (Machine Learning) играет все более важную роль в оптимизации систем MIMO. Данные технологии могут быть использованы для более точной оценки канала, адаптивного формирования луча, интеллектуального распределения ресурсов и даже для оценки пропускной способности канала, что позволяет системам динамически адаптироваться к изменяющимся условиям среды и потребностям пользователей.

Кроме того, исследования в области миллиметрового (mmWave) и терагерцового (THz) диапазонов частот, где доступна огромная полоса пропускания, тесно связаны с развитием MIMO. В этих диапазонах MIMO, особенно методы формирования луча, имеют решающее значение для преодоления высоких потерь на трассе распространения сигнала. В целом, MIMO остается фундаментальной технологией, которая будет продолжать формировать будущие поколения беспроводной связи, обеспечивая постоянно растущие требования к скорости, надежности и пропускной способности.

Литература

1. Савищенко Н. В. Специальные интегральные функции, применяемые в теории связи: Монография. – СПб.: ВАС, 2012. 560 с.
2. Foschini G. J., Gans M. J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas // Wireless Personal Communications, 1998, Vol. 6, no. 3. pp. 311–335.
3. Biglieri E., Calderbank R., Constantinides A., Goldsmith A., Paulraj A., Poor H. V. MIMO Wireless Communications. – Cambridge University Press, 2007. 334 p.
4. Larsson E. G., Edfors O., Tufvesson F., Marzetta T. L. Massive MIMO for next generation wireless systems // IEEE Communications Magazine, 2014, Vol. 52, no. 2. pp. 186–195.
5. Голдсмит А. (2005). Беспроводные телекоммуникации. Перевод Бирюкова Н. Л., Триски Н. Р. – Москва: Технофера, 2011. 992 с.
6. Tse, D., Viswanath, P. Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge University Press, 2005. 378 p.
7. Слюсарь В. И. Системы MIMO: принципы построения и обработка сигналов. // Электроника: Наука, Технология, Бизнес, 2005. № 8. С. 58–65.
8. Paulraj A., Nabar R., Gore D. Introduction to Space-Time Wireless Communications. Cambridge University Press, 2008, pp. 34–38.
9. Бураченко Д. Л., Савищенко Н. В. Геометрические модели сигнально-кодированных конструкций: Учеб. пособие. Изд. 2-е. – СПб.: ВАС, 2020. 390 с.
10. Бакулин М. Г., Варукина Л. А., Крейнделин В. Б. Технология MIMO: принципы и алгоритмы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 248 с.
11. Jankiraman M. Space-time codes and MIMO systems. USA, MA: Artech House, 2004. 327 p.
12. Tsoulos G. V. MIMO System Technology for Wireless Communications. CRC Press, 2006, pp. 66–69.
13. Петров В. П., Якушев И. Ю. Современные технологии в системе MIMO // Вестник СибГУТИ. 2019. № 2. С. 14–25.
14. Chen X., Soh P. J., Sharawi M. S. MIMO Antenna Systems for 5G and Beyond. Wiley-IEEE Press, 2024, pp. 15–18, 43–45.
15. Gershman A. B., Sidiropoulos N. D. Space-time processing for MIMO communications. John Wiley Sons, Ltd, 2005. 369 p.
16. Gore D., Heath R. W., Paulraj A. On performance of the zero forcing receiver in presence of transmit correlation. Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Lausanne, Switzerland, 2002, pp. 159–165.
17. Савищенко Н. В., Пелин А. А. Распределение Уишарта для анализа помехоустойчивости приема многоантенных систем беспроводной связи // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: материалы Междунар. научной конференции, Воронеж, 12–15 ноября 2025 г. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2025. – С. 832–838.
18. Montiouis W., Imoize A. L. Massive MIMO for future wireless communication systems: technology and applications. Wiley, 2025, pp. 61–63.

PERFORMANCE ANALYSIS OF MIMO SYSTEMS USING THE ZERO-FORCING METHOD

Savischenko N. V.³, Pelin A. A.⁴

Keywords: wireless communication systems, information theory, digital signal processing, fading channels, multi-antenna systems, precoding, zero-forcing method, special integral functions.

Abstract

Objective: the objective of this paper is to analyze the efficiency of the zero-forcing (ZF) method for signal reception in MIMO (Multiple Input Multiple Output) systems and to obtain exact analytical expressions for the error probability using the theory of potential noise immunity and the theory of special functions.

Methods: the study utilizes a comprehensive approach combining rigorous analytical calculations and simulation modeling in the MATLAB environment to evaluate the performance of spatial signal filtering using the zero-forcing method in MIMO systems.

1. The calculation of the bit error rate (BER) for the ZF detector is performed based on the analysis of the statistical properties of the inverse channel correlation matrix. The derivation of expressions for noise immunity is carried out using the mathematical apparatus of special integral functions (Gaussian function, Owen's T-function) in accordance with the methodology presented in the monograph «Special integral functions applied in communication theory» [1]. This methodology allows obtaining rigorous theoretical performance bounds.

³ Nikolay V. Savischenko, Dr.Sc. of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of General Professional Disciplines of the Military Academy of Communications named after S. M. Budenny, St. Petersburg, Russia. E-mail: snikaspb@mail.ru

⁴ Artem A. Pelin, Adjunct of the Department of General Professional Disciplines, S. M. Budyonny Military Academy of Communications, St. Petersburg, Russia. E-mail: PelinVUC@yandex.ru

2. *Simulation modeling: to verify the obtained analytical expressions and study the system's behavior under real signal-to-noise and interference conditions, a simulation model of a MIMO channel with Rayleigh fading was developed in the MATLAB environment.*

Results: the analytical and experimental data obtained reveal the specifics of the zero-forcing method operation in MIMO systems. In particular, it is established that the ZF method allows completely eliminating intersymbol (inter-channel) interference via channel matrix inversion. However, modeling revealed a key drawback of the method – the noise enhancement effect, which manifests itself under ill-conditioned channel matrices. A comparative analysis showed that in the low signal-to-noise ratio region, the ZF method is inferior to the MMSE (Minimum Mean Square Error) algorithm in terms of power efficiency but demonstrates high efficiency and a linear growth of capacity at high SNR values. A close agreement between the calculation results based on the proposed analytical methodology (via special functions) and the Monte Carlo simulation results is confirmed.

Scientific novelty: the scientific novelty of the paper lies in the adaptation of the mathematical apparatus of special integral functions for the exact calculation of noise immunity using the zero-forcing method, taking statistical characteristics into account. In contrast to traditional estimates based on asymptotic approximations, the proposed approach allows for obtaining rigorous quantitative estimates of the error probability for M-ary signal reception by a linear detector under Rayleigh fading conditions, which significantly increases the reliability of communication quality prediction during the design of antenna systems.

References

1. Savischenko N. V. Special'ny'e integral'ny'e funktsii, primenyaemy'e v teorii svyazi: Monografiya. – SPb.: VAS, 2012. 560 s.
2. Foschini G. J., Gans M. J. On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas // Wireless Personal Communications, 1998, Vol. 6, no. 3. pp. 311–335.
3. Biglieri E., Calderbank R., Constantinides A., Goldsmith A., Paulraj A., Poor H. V. MIMO Wireless Communications. – Cambridge University Press, 2007. 334 p.
4. Larsson E. G., Edfors O., Tufvesson F., Marzetta T. L. Massive MIMO for next generation wireless systems // IEEE Communications Magazine, 2014, Vol. 52, no. 2. pp. 186–195.
5. Goldsmit A. (2005). Besprovodny'e telekommunikatsii. Perevod Biryukova N. L., Triski N. R. – Moskva: Texnosfera, 2011. 992 s.
6. Tse, D., Viswanath, P. Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge University Press, 2005. 378 p.
7. Slyusar' V. I. Sistemy' MIMO: principy' postroeniya i obrabotka signalov. // E'lektronika: Nauka, Tekhnologiya, Biznes, 2005. № 8. S. 58–65.
8. Paulraj A., Nabar R., Gore D. Introduction to Space-Time Wireless Communications. Cambridge University Press, 2008, pp. 34–38.
9. Burachenko D. L., Savishhenko N. V. Geometricheskie modeli signal'no-kodovy'x konstrukcij: Ucheb. posobie. Izd. 2-e. – SPb.: VAS, 2020. 390 s.
10. Bakulin M. G., Varukina L. A., Krejndelin V. B. Tekhnologiya MIMO: principy' i algoritmy'. - M.: Goryachaya liniya – Telekom, 2014. 248 s.
11. Jankiraman M. Space-time codes and MIMO systems. USA, MA: Artech House, 2004. 327 p.
12. Tsoulos G. V. MIMO System Technology for Wireless Communications. CRC Press, 2006, pp. 66–69.
13. Petrov V. P., Yakushev I. Yu. Sovremennyy'e tekhnologii v sisteme MIMO // Vestnik SibGUTI. 2019. № 2. S. 14–25.
14. Chen X., Soh P. J., Sharawi M. S. MIMO Antenna Systems for 5G and Beyond. Wiley-IEEE Press, 2024, pp. 15–18, 43–45.
15. Gershman A. B., Sidiropoulos N. D. Space-time processing for MIMO communications. John Wiley Sons, Ltd, 2005. 369 p.
16. Gore D., Heath R. W., Paulraj A. On performance of the zero forcing receiver in presence of transmit correlation. Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory, Lausanne, Switzerland, 2002, pp. 159–165.
17. Savischenko N. V., Pelin A. A. Raspredelenie Uisharta dlya analiza pomexoustojchivosti priema mnogoantenny'x sistem besprovodnoj svyazi // Aktual'ny'e problemy' prikladnoj matematiki, informatiki i mexaniki: materialy' Mezhdunar. nauchnoj konferencii, Voronezh, 12–15 noyabrya 2025 g. – Voronezh: Izdatel'skij dom VGU, 2025. – S. 832–838.
18. Montiouis W., Imoize A. L. Massive MIMO for future wireless communication systems: technology and applications. Wiley, 2025, pp. 61–63.

